Annexe 3

Analyse du problème

Énoncé du problème présenté au sujet :

On écrit les quarante premiers nombres entiers les uns à la suite des autres, sans les séparer. Cela donne une longue liste de chiffres.

012345678910111213
141516171819202122
232425262728293031
323334353637383940

On efface une partie de ces chiffres de manière à ce qu'il n'en reste plus que neuf.
Quels sont les chiffres qu'il faut garder pour que le nombre de neuf chiffres soit le plus grand possible ?

Attention on garde les neuf chiffres que l'on veut, mais
les chiffres restent dans l'ordre où ils sont écrits.
Ainsi avec12345 on peut garder .2.4.. ce qui fait 24 et non 42

Pour conserver ses propriétés essentielles au problème, il suffit de demander une réponse dont le nombre de chiffres soit égal à 6 + le nombre de dizaines moins une. Soit 11 chiffres pour les 60 nombres (6 + 6-1), 9 pour 40 chiffres (6 + 4-1). Il faut cependant noter que les chiffres disponibles ne sont pas les mêmes selon les dizaines utilisées et que le choix de 60 est particulièrement intéressant pour le nombre de réponses possibles et pour l'équilibre des contraintes qu'il présente.

Un des intérêts de ce problème réside dans le fait que le sujet définit lui-même son critère de réussite puisque le plus grand nombre est toujours le plus grand qu'il puisse faire avec les techniques qu'il a adoptées. De ce fait la résolution de ce problème est scandée par une succession de réponses que le sujet considère à chaque fois comme la meilleure réponse avant de la remettre en cause.

Analyse du problème :

Ce problème ne nécessite que peu de connaissances mathématiques et, sous cette forme, il est réussi dès le Cours Élémentaire. Il faut simplement connaître les règles de la "numération décimale de position", c'est à dire l'écriture des nombres entiers. Le système décimal n'utilisant que dix chiffres (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) le onzième nombre doit être une combinaison des précédents (10 combine 1 et 0). La règle de position consiste à se décaler d'une place vers la gauche chaque fois qu'on passe à la puissance de dix suivante.
1789 correspond ainsi à la somme de quatre nombres :
$(10^3 \times 1) + (10^2 \times 7) + (10^1 \times 8) + (10^0 \times 9)$
Les positions des chiffres correspondent aux exposants des puissances de 10 et les chiffres eux-mêmes correspondent au nombre par lequel elles sont multipliées.

Autrement dit deux choses comptent dans l'écriture d'un nombre : les chiffres qui le composent (99 est plus grand que 11) et la position de ces chiffres (91 est plus grand que 19). Le nombre est d'autant plus grand que les plus grands chiffres sont plus à gauche.

La difficulté la plus évidente de ce problème tient à l'opposition entre les deux contraintes relatives de *garder les plus grands* et de *les placer le plus à gauche* . Mais notre expérience d'un millier de résolutions de ce problème sous différentes formes permet de décrire la hiérarchie des contraintes progressivement prises en compte par les sujets.

Après avoir distingué nombres et chiffres il faut encore *se limiter aux chiffres présents dans l'énoncé*. Des réponses comme 999999999 sont interdites car il y a seulement cinq 9.

Il faut ensuite *tenir compte de l'ordre* et ne pas prendre un chiffre qui se trouve avant un chiffre déjà pris.

On se trouve ensuite devant l'opposition des *deux contraintes* relatives citées plus haut.

Si on place tous les 9, comme il n'y en a que cinq on se trouve au mieux devant trois places vides qu'on ne peut plus remplir en respectant l'ordre des chiffres .

999940???

Autrement dit il ne faut placer que les trois premiers 9 de manière à conserver suffisamment de chiffres en réserve pour terminer le nombre .

999??????

Et on travaille sur la séquence de chiffres correspondant à la dernière dizaine :

3031323334353637383940

La meilleure solution peut être présentée de deux manières selon qu'on part d'un critère ou de l'autre.

Si on part des plus grands chiffres, le plus grands de tous est certainement le 9 de 39, pour le placer le plus à gauche possible il faut le faire suivre du 4 et du 0 :

999???940

Le 8 est le plus grand chiffre restant, pour le placer le plus à gauche il faut le faire suivre du 3 de 39 :

999?83940

Il reste un chiffre à mettre et le 7 est certainement le plus grand, il est aussi le plus à gauche possible puisqu'il n'y a plus qu'une place :

999783940

Si on part de la gauche après les trois 9, il faut mettre le plus grand chiffre possible à l’extrême gauche.

999??????

Si on met le 9 il ne restera plus assez de chiffres pour remplir, comme on l'a vu, donc on peut essayer le 8, mais le même problème se pose :

99983940?

Il reste donc le 7 qui est suivi de plus de cinq chiffres:

3031323334353637*383940*

9997?????

Le chiffre suivant ne peut toujours pas être le 9 car il manquerait encore deux chiffres :

9997940??

Reste donc le 8 qui est suivi de quatre chiffres :

30313233343536373 8*3940*

99978????

Comme il ne reste que quatre chiffres disponibles ou comme on ne peut pas mettre le 9 après le 8 (il manquerait un chiffre) il ne reste plus qu'à compléter le nombre avec les chiffres restants :

999783940

Bien qu'il existe de très nombreuses manières de constituer un nombre de 9 chiffres avec les chiffres donnés, on n'observe généralement que quelques solutions correspondant à la prise en compte progressive des critères de réponse. Ce sont généralement les suivantes :

999988887
898989894
989898940
999567894
999637896
999673896
999679860
999678396
999738396
999738960